Soluciones Hoja 2 Pedro Balodis

Problema 3. Determinar qué sucesiones convergen, usando la definición:

a) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$: Es convergente, pues por lo visto en clase, es decreciente y acotada ($a_n = r^n$ con $0 < r = 1/2 < 1$). Su límite es 0.

b) $b_n = \sqrt{n}$: No es convergente (aunque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente), pero tiene límite ∞. Si $R > 0$, $b_n \geq R$ si $n \geq R^2$ (entonces $\sqrt{n} \geq \sqrt{R^2} = R$; $R > 0$).

c) $c_n = 3 + (-1)^n$: No es convergente, pues si tomamos las subsucesiones $d_n = c_{2n}$, $e_n = c_{2n-1}$, $d_n = 4\,\forall n$, $e_n = 2\,\forall n$, luego $d_n \to 4$, $e_n \to 2$, que son límites diferentes.

Problema 4. Ver que las siguientes sucesiones divergen y determinar si tienen límite $\pm\infty$:

a) $a_n = \dfrac{n^3}{10n^2 + 2009}$:

$$\begin{aligned} a_n &= n\frac{n^2}{10n^2+2009} \\ &= n\underbrace{\frac{1}{10+2009n^{-2}}}_{:=c_n \to 1/10} \end{aligned}$$

Puesto que $c_n \to 1/10 > 0$ y claramente $n \to \infty$, usando la Prop. 10 de las notas de clase, se sigue que $a_n \to \infty$.

b) $b_n = -n^2$: Claramente, $b_n \to -\infty$, pues $n^2 \to \infty$.

c) $c_n = \dfrac{1+(-1)^n}{3-(-1)^n}$. Tomando las subsucesiones $c'_n := c_{2n} = 1$, $c''_n := c_{2n-1} = 0$, vemos que $c'_n \to 1$, $c''_n \to 0$, que son dos límites diferentes, luego $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente; no tiene límite $\pm\infty$ por ser acotada: $|c_n| \leq 1\,\forall n$.

d) $d_n = (-2)^n$: Puesto que $c_n = r^n$ con $r = -2 < -1$, por lo visto en teoría, $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ es divergente y no tiene tampoco límites $\pm\infty$. Sin embargo, $|d_n| \to \infty$.

Problema 5. Encontrar los siguientes límites, usando lo visto en clase:

a) $\lim_{n\to\infty} 0,2011^n$: Claramente, el límite es 0, pues $0 < 0,2011 < 1$.

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-5)^n}{12^{n+1}}$: $a_n = \dfrac{(-5)^n}{12^{n+1}} = \dfrac{1}{12}(-\dfrac{5}{12})^n \to 0$, pues $|-\dfrac{5}{12}| < 1$, luego $(-\dfrac{5}{12})^n \to 0$ y también lo es el límite pedido.

c) $\lim_{k\to\infty}(\dfrac{e}{\pi})^k$: Puesto que $0 < e < 3 < \pi$, $0 < \dfrac{e}{\pi} < 1$, luego el límite pedido es 0.

d) $\lim_{k\to\infty} e^{1/(k+1)}$: Claramente, $\lim_{k\to\infty} 1/(k+1) = 0$. Entonces, usando la Prop.12 (propiedades de e^x), se sigue que el límite es $e^0 = 1$.

Problema 6. Usando el Teorema del Encaje (Prop.4iii) de las Notas de Clase), encontrar los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!}$: Claramente, $1 \leq n \leq n!\,\forall n$, luego $0 \leq \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n}, \forall n$. Tomnado $a_n = 0$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n, b_n \to 0$, luego el límite anterior es 0.

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2\cos(3n)+5\mathrm{sen}\,(n^2)}{n+1}$: Estimamos $|\dfrac{2\cos(3n)+5\mathrm{sen}\,(n^2)}{n+1}| \leq \dfrac{7}{n+1}$ (usando que $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$ están entre -1 y 1, así como las propiedades del valor absoluto), luego

$$-\frac{7}{n+1} \leq \frac{2\cos(3n)+5\mathrm{sen}\,(n^2)}{n+1} \leq \frac{7}{n+1}\ \forall n.$$

Tomando $a_n = -\dfrac{7}{n+1}$, $b_n = \dfrac{1}{n+1}$, $a_n, b_n \to 0$, luego el límite anterior es 0.

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}$: Estimamos

$$|(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)| \leq 1 + 2^{-n} + 1 \leq 3\ \forall n,$$

luego $|\dfrac{(-1)^n + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}| \leq \dfrac{3}{\sqrt{n}}$. Tenemos que $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$, pues $a_n = \sqrt{n}$ es creciente, y si no tendiera a ∞, estaría acotada (por ser creciente). Puesto que $a_n^2 = n$, que claramente $\to \infty$, obtendríamos una contradicción. Por tanto, $\dfrac{3}{\sqrt{n}} \to 0$ (Prop.7 de las Notas de Clase), y razonando como en b), se sigue que el límite es 0.

Problema 7. Determinar cuáles sucesiones son convergentes, y sus límites (cuando existan):

a) $a_n = \dfrac{3n^4-2}{n^4+2n^2+2}$: $a_n = \dfrac{3-2n^{-4}}{1+2n^{-2}+2n^{-4}}$, luego claramente $a_n \to \dfrac{3}{1} = 3$.

b) $a_n = \dfrac{8n^2-7n}{2n^3+5}$: $a_n = \dfrac{8-7n^{-1}}{n+5n^{-2}}$. Puesto que $n+5n^{-2} \to \infty$, $\dfrac{1}{n+5n^{-2}} \to 0$, y $8-7n^{-1} \to 8$, luego el límite anterior es 0 (más informalmente, el límite considerado sería "$\dfrac{8}{\infty} = 0$").

c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$: Escribimos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \end{aligned}$$

Claramente, $\sqrt{n^2+1}+n \geq \sqrt{n^2}+n = 2n \to \infty$, luego $\sqrt{n^2+1}+n \to \infty$ y entonces $a_n \to 0$ (límite $\dfrac{1}{\infty} = 0$).

d) $a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$: Escribimos $a_n = n(\sqrt{n^2+1}+n)$, y usando c),

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^{-2}}+1}$$

Puesto que $1+n^{-2} \to 1+0 = 1$, $\sqrt{1+n^{-2}}+1 \to \sqrt{1}+1 = 2$ (ésto en realidad requeriría justificación aparte, pero lo dejaremos para el tema "Continuidad de funciones"), y entonces $a_n \to 1/2$ (por la Prop.1 de las Notas de Clase).

e) $a_n = \dfrac{4^n}{5^n+6^n}$: Escribimos

$$a_n = \frac{4^n 6^{-n}}{(5^n+6^n)6^{-n}} = \frac{(2/3)^n}{(5/6)^n+1}.$$

Puesto que $0 < 2/3, 5/6 < 1$, $(2/3)^n, (5/6)^n \to 0$, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{0}{0+1} = 0$.

f) $a_n = \dfrac{6^n}{5^n + (-6)^n}$: Escribimos

$$a_n = \frac{6^n(-6)^{-n}}{(5^n + (-6)^n)(-6)^{-n}} = (-1)^n \frac{1}{(-5/6)^n + 1}.$$

Puesto que $|-5/6| < 1$, $(-5/6)^n \to 0$, luego $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{(-5/6)^n + 1} = 1 \neq 0$. Éso implica que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no puede tener límite, pues de tenerlo, también lo tendría entonces $(-1)^n$, lo cual no es el caso. (otra forma de verlo es considerar las subsucesiones $a_{2n} = \dfrac{1}{(-5/6)^{2n} + 1} \to 1$ y $a_{2n-1} = \cdot \dfrac{1}{(-5/6)^{2n-1} - 1} \to -1$, que son límites diferentes.)

Problema 8. Determinar los límites:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^3}$: $a_n = \sqrt{2n^3} = \sqrt{2}n^{3/2} \to \infty$, pues para cualquier $a > 0$, $n^a \to \infty$ y $\sqrt{2} > 0$.

b) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3/2} + \pi^{-1/n})$: $a_n = (\sqrt[n]{3/2} + \pi^{-1/n}) = (3/2)^{1/n} + \pi^{-1/n}$. Tenemos

$$(3/2)^{1/n} = \exp(\frac{\log(3/2)}{n}) \to e^0 = 1, \text{ pues } \frac{\log(3/2)}{n} \to 0$$

De modo similar, $\pi^{-1/n} \to 1$, luego el límite pedido es 2.

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[2n]{e} + e^{-n})$:

$$a_n = \sqrt[2n]{e} + e^{-n} = \underbrace{e^{1/(2n)}}_{\to e^0=1} + \underbrace{e^{-n}}_{\to 0} \to 1$$

d) $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n$:

$$a_n = (\frac{n}{n+1})^n = (1 - \frac{1}{n+1})^n = (1 + b_n)^n;\ b_n = -\frac{1}{n+1}$$

Como $nb_n \to -1$, el límite pedido es e^{-1}.

e) $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n+2})^{2n}$:

$$a_n = (\frac{n+1}{n+2})^{2n} = \left[(1 - \frac{1}{n+2})^n\right]^2 = [(1 + b_n)^n]^2;\ b_n = -\frac{1}{n+2}$$

Como $nb_n \to -1$, el límite pedido es $(e^{-1})^2 = e^{-2}$.

f) $\lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2})^n$:

$$a_n = (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n = (1 + b_n)^n;\ b_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Como $nb_n \to 2$, el límite pedido es e^2.

Problema 9. Dar ejemplos de:

a) Una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ con $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ monótona y acotada, pero divergente:

Solución: La sucesión $a_n = (-1)^n$ cumple todo éso, según lo visto en teoría.

b) Una sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ con $(b_{n+1}/b_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente, pero $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ no:

Solución: La sucesión $b_n = (-1)^n$ cumple todo éso, pues no es convergente y $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = -1\,\forall n$, que es obviamente convergente.

Problema 10. Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones acotadas superiormente y A, B sus respectivos supremos ($A = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$), o abreviadamente $A = \sup_n a_n$, y de modo similar para B y $C = \sup_n(a_n + b_n)$).

a) ¿Se cumple siempre $C \leq A + B$?.

Respuesta: Sí, y su justificación es la siguiente:

Por definición de A y B, tenemos:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq A, b_n \leq B \Rightarrow c_n = a_n + b_n \leq A + B \tag{1}$$

De (1) se sigue que $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente, siendo $A+B$ una cota superior para ésa sucesión. Por tanto,

$$C = \sup_n c_n \leq A + B$$

como se afirma.

b) ¿Se cumple siempre que $A + B = C$ si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ son crecientes?

Respuesta: Sí, y su justificación es la siguiente: Primero, observamos que $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ lo son:

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n) \\ &= \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{\geq 0} + \underbrace{(b_{n+1} - b_n)}_{\geq 0};\ a_n,\, b_n \text{ crecientes} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Por ser $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ todas crecientes, tenemos $A = \lim_{n\to\infty} a_n$, $B = \lim_{n\to\infty} b_n$, $C = \lim_{n\to\infty} c_n$ y entonces

$$A + B = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(a_n + b_n)}_{=c_n} = C$$

c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

Respuesta: No, pues consideremos $a_n = (-1)^n = -b_n$. Tenemos entonces $c_n = 0\,\forall n$, luego $C = 0$, pero $\sup_n a_n = \sup_n b_n = 1$ y entonces $C < A + B$.

Problema 11. Consideramos la sucesión a_n definida por

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n},\ n \geq 1;\ a_1 = 1$$

(una relación de recurrencia). Probar:

a) $a_n < 2\,\forall n$ (por inducción):

Prueba: Para $n = 1$, obvio, y si a) es cierto para un $n \geq 1$, para $n+1$ tenemos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n};\ 2a_n < 2 \cdot 2 = 2^2, \text{ pues } a_n < 2 \\ &< \sqrt{2^2} = 2 \end{aligned}$$

b) Probar que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y hallar su límite:

Prueba: Primero, observemos que $a_n > 0\,\forall n$ (obvio si $n = 1$, y si para un $n \geq 1$ se cumple $a_n > 0$, para $n+1$ tenemos $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > 0$, por ser $2a_n > 0$). Una vez observado ésto, podemos calcular:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2a_n} - a_n \\ &= \sqrt{a_n}(\sqrt{2} - \sqrt{a_n}) \\ &= \sqrt{a_n}\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{a_n})(\sqrt{2} + \sqrt{a_n})}{\sqrt{2} + \sqrt{a_n}} \\ &= \sqrt{a_n}\frac{2 - a_n}{\sqrt{2} + \sqrt{a_n}} \\ &> 0 \text{ por } a) \end{aligned}$$

luego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente (estrictamente). Una vez que sabemos ésto, deducimos que $\exists a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y además $1 = a_1 < a \leq 2$ por ser $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente (y acotada por 2). Para calcular a usamos la relación de recurrencia:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2a}$$

de dónde $a^2 = 2a \Rightarrow a = 0 \vee a = 2$; puesto que $a \geq 1$, $a = 2$. (Observación: el cálculo anterior se justifica porque sabemos que las sucesiones involucradas tienen límite. Informalmente, puede hacerse tal cálculo, sin justificar los pasos intermedios, para encontrar los posibles candidatos al límite a).

c) Encontrar una fórmula exacta para a_n:

Solución: Tenemos $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2} = 2^{1/2}$, $a_3 = (2^{1+1/2})^{1/2} = 2^{1/2+(1/2)^2}$, así que parece que el patrón es

$$a_1 = 1,\ a_n = 2^{\sum_{j=1}^{n-1}(1/2)^j};\ n \geq 2,\ \sum_{j=1}^{n-1}(1/2)^j = 1-(1/2)^n, \text{ luego } a_n = 2^{1-(1/2)^n}$$

que trataremos de probar por inducción (en la forma $a_n = 2^{1-(1/2)^n}$, $n \geq 1$): Si $n = 1, 2, 3$, ya lo hemos comprobado, y si para un $n \geq 1$ la fórmula anterior es cierta, para $n+1$ tenemos

$$a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-(1/2)^n}} = \sqrt{2^{2-(1/2)^n}} = 2^{(1/2)(2-(1/2)^n)} = 2^{1-(1/2)^{n+1}},$$

luego la fórmula conjeturada es cierta, y con ella es obvio que $a_n \to 2$.

Problema 12. (lo haré con mayor generalidad de la pedida en el ejercicio): Se considera, para un $t \geq 0$ fijo, la sucesión x_n, $n \geq 1$ definida por:

$$x_1 \in [\sqrt{t}, \infty) \text{ (arbitrario)},\ x_{n+1} = f(x_n);\ f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{t}{x}),\ x > 0$$

a) Probar que $\forall n \geq 1$, $x_n \geq \sqrt{t}$.

Prueba: Si $n = 1$ a) es cierto por nuestra elección de x_1, y si para un $n \geq 1$ a) es cierto, para $n+1$ tenemos, por un lado, $x_{n+1} > x_n/2 > 0$ (supuesto que $x_n > 0$) (luego $x_n > 0\,\forall n$) y entonces, para $n+1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{x_n}{2} + \frac{t}{2x_n}\right)^2 \\ &\geq 4\left(\frac{x_n}{2}\right)\left(\frac{t}{2x_n}\right);\ (a+b)^2 \geq 4ab \\ &= t \end{aligned}$$

luego, por ser $x_{n+1} > 0$, $x_{n+1} \geq \sqrt{t}$. (<u>Observación:</u> La desigualdad $(a+b)^2 \geq 4ab$, que aparece como indicación en el ejercicio se deduce de que $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, luego $4ab = (a+b)^2 - \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} \leq (a+b)^2$).

b) Probar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y que $x_n \to \sqrt{t}$:

Prueba: Tenemos, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}(\frac{t}{x_n} - x_n) \\ &= \frac{t - x_n^2}{2x_n} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

pues $x_n \geq \sqrt{t}\,\forall n$, según b). Por tanto, $\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Para encontrar x usamos la relación de recurrencia:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\frac{x_n}{2} + \frac{t}{x_n}) = \frac{x}{2} + \frac{t}{2x}$$

que implica $x^2 = t$. Como $x \geq \sqrt{t}$, se sigue que $x = \sqrt{t}$.

<u>Observación:</u> Si no suponemos $x_1 \geq \sqrt{t}$, si partimos de un $x_1 > 0$ cualquiera y fuera $0 < x_1 < \sqrt{t}$, se puede ver fácilmente que en la 2ª iteración $x_2 \geq \sqrt{t}$, pues si se da éste caso, podemos escribir $f(x_1) = \sqrt{R}g(t)$ con $g(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $t = \frac{x_1}{\sqrt{R}} > 0$. Pero $g(t) \geq 1\,\forall t > 0$, pues $g(t) - 1 = \frac{(t-1)^2}{2t} \geq 0$. Por tanto, el esquema iterativo converge a $\sqrt{t}$ para cualquier elección de $x_1 > 0$.

Problema 13. Se considera la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (observemos que n empieza en 0) dada por $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2}$, $n \geq 2$

a) Probar que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente:

Prueba: Tenemos, para $n \geq 2$,

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$$

de dónde el signo de $a_{n+1} - a_n$ coincide con el de $a_n - a_{n-1}$. Iterando ésto n veces, llegamos a que el signo de $a_{n+1} - a_n$ coincide con el de $a_1 - a_0$, que es positivo, luego la sucesión es creciente.

b) (lo omito: se sugiere experimentar un poco uno mismo, y aparentemente es difícil sacar ninguna conclusión sobre la acotación de la sucesión a_n).

c) Probar por inducción que $a_n = 3 - (1/2)^{n-1}$ y deducir que $a_n \to 3$:

Prueba: Para $n = 0, 1$ la fórmula es inmediata, y si para un $n \geq 1$ la fórmula es válida, para $n+1$ tenemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} \\ &= \frac{3}{2}\left[3 - (1/2)^{n-1}\right] - \frac{1}{2}\left[3 - (1/2)^{n-2}\right] \\ &= 3 - (1/2)^n \end{aligned}$$

luego la fórmula es válida para todo n. Es inmediato entonces que $a_n \to 3$.

Observación: Para ver cómo se podía haber deducido ésto, podemos observar lo siguiente: Sea $n \geq 1$. Entonces:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_0) = \frac{1}{2},\ a_3 - a_2 = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) = (\frac{1}{2})^2, \ldots, a_n - a_{n-1} = (\frac{1}{2})^{n-1}$$

A continuación, escribimos, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= [(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_1 - a_0)] + a_0 \\
&= \left[(1/2)^{n-1} + (1/2)^{n-2} + \ldots (1/2)^0\right] + 1 \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} (1/2)^j \\
&= 1 + \frac{(1/2)^0 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \\
&= 3 - (1/2)^{n-1}
\end{aligned}$$